International Journal of Computer Applications (0975 8887)
Volume 89 - No. 1, March 2014

Bi-implication Operator on Intuitionistic Fuzzy Set

P. Murugadas
Assistant Professor
Mathematics Section, FEAT
Annamalai University,
Annamalainagar, India.

K.Lalitha
Assistant Professor
Mathematics Section, FEAT
Annamalai University,
Annamalainagar, India.

ABSTRACT

In this paper we introduce a Biimplication operator $\leftrightarrow$ for intuitionistic fuzzy set and discuss several properties of it.

Keywords:

Intuitionistic Fuzzy Sets(IFSs), Intuitionistic Fuzzy Matrix(IFM), implication operator and bi-implication operator.

1. INTRODUCTION

After the introduction of fuzzy set theory by Zadah[7] in 1965, fuzzy concepts evolved in almost all fields. Hiroshi Hasimoto[2] used implication operator in fuzzy set and extended it to fuzzy matrix theory and obtained results in sub-inverse of fuzzy matrix using fuzzy relational equation. Atanassov[1] generalized fuzzy set theory to intuitionistic fuzzy set theory. S.Sriram and P.Murugadas[4,5,6] developed this implication operator to intuitionistic fuzzy set and extended it to IFM. The authors [3] have studied dual implication operators in IFS. In this paper we introduce a bi-implication operator to $IFSs$ and study some properties of it.

DEFINITION 1.1. [1] An Intuitionistic Fuzzy Set(IFS) A in E(universal set) is defined as an object of the following form $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle / x \in E\}$,where the functions: $\mu_A(x) : E \to [0, 1]$ and $\nu_A(x) : E \to [0, 1]$ define the membership and non-membership of the element $x \in E$ respectively and for every $x \in E : 0 \le \mu_{A(x)} + \nu_A(x) \le 1$.

For simplicity we consider the pair $\langle x, x' \rangle$ as membership and non-membership function of an IFS with $x + x' \le 1$.

DEFINITION 1.2. [6] Let $\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle \in IFS$ define
$\langle a, a'\rangle \to \langle b, b'\rangle$
$$= \begin{cases} \langle 1, 0\rangle & \text{if } \langle a, a'\rangle \le \langle b, b'\rangle \\ \langle b, b'\rangle & \text{if } \langle a, a'\rangle > \langle b, b'\rangle \end{cases}$$
and $\langle a, a'\rangle \leftarrow \langle b, b'\rangle = (\langle b, b'\rangle \to \langle a, a'\rangle)$.

2. BI-IMPLICATION OPERATOR $\leftrightarrow$

DEFINITION 2.1. Let $\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle \in IFS$ define
$\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle = (\langle a, a'\rangle \leftarrow \langle b, b'\rangle) \wedge (\langle a, a'\rangle \to \langle b, b'\rangle)$ that is
$$\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle = \begin{cases} \langle b, b'\rangle & \text{if } \langle a, a'\rangle > \langle b, b'\rangle \\ \langle 1, 0\rangle & \text{if } \langle a, a'\rangle = \langle b, b'\rangle \\ \langle a, a'\rangle & \text{if } \langle a, a'\rangle < \langle b, b'\rangle \end{cases}$$
Easily $\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle = \langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle a, a'\rangle$.

PROPOSITION 2.2. Let $\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle, \langle c, c'\rangle \in IFS$, then $(\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) \wedge (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) \le (\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle)$.

PROOF.
case 1. If $\langle c, c'\rangle \ne \langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle$ then$(\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) \wedge (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) = \langle a, a'\rangle \wedge \langle b, b'\rangle \wedge \langle c, c'\rangle \le \langle a, a'\rangle \wedge \langle b, b'\rangle \le \langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle$
case 2. If $\langle c, c'\rangle = \langle a, a'\rangle$ but $\langle c, c'\rangle \ne \langle b, b'\rangle$ then $(\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) \wedge (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) = (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) = (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle a, a'\rangle) = (\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle)$
case 3. If $\langle c, c'\rangle \ne \langle a, a'\rangle$ but $\langle c, c'\rangle = \langle b, b'\rangle$ then $(\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle c, c)\rangle \wedge (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) = \langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle = \langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle$
case 4. If $\langle a, a'\rangle = \langle b, b'\rangle = \langle c, c'\rangle$ then $(\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) \wedge (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) = (\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle) \wedge (\langle c, c'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) = \langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle$ □

PROPOSITION 2.3. Let $\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle \in IFS$, then $\langle a, a'\rangle \wedge (\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle) \le \langle b, b'\rangle$

PROOF.
$$\langle a, a'\rangle \wedge (\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle b, b'\rangle\ ) = \begin{cases} \langle b, b'\rangle & \text{if } \langle a, a'\rangle > \langle b, b'\rangle \\ \langle a, a'\rangle & \text{if } \langle a, a'\rangle \le \langle b, b'\rangle \end{cases}$$
$$\le \langle b, b'\rangle . \quad \square$$

LEMMA 2.4.
$$(\langle a, a'\rangle \wedge \langle b, b'\rangle) \leftarrow \langle c, c'\rangle = (\langle a, a'\rangle \leftarrow \langle c, c'\rangle) \wedge (\langle b, b'\rangle \leftarrow \langle c, c'\rangle) \quad ...(2.1)$$

PROOF. case 1.
Assume $\langle a, a'\rangle < \langle b, b'\rangle$
sub case 1.
If $\langle b, b'\rangle < \langle c, c'\rangle$, then $\langle a, a'\rangle < \langle c, c'\rangle$,so
$\langle a, a'\rangle \leftarrow \langle c, c'\rangle = \langle a, a'\rangle \wedge \langle b, b'\rangle$
$\langle a, a'\rangle = \langle a, a'\rangle$.
sub case 2. If $\langle a, a'\rangle < \langle c, c'\rangle$, then $\langle b, b'\rangle > \langle c, c'\rangle$ or $\langle b, b'\rangle < \langle c, c'\rangle$ consider$\langle b, b'\rangle > \langle c, c'\rangle$, then

$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$, $\langle a,a'\rangle = \langle a,a'\rangle$. Similarly we can prove when $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$
sub case 3. If $\langle c,c'\rangle \neq \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle$
$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle) \wedge (\langle c,c'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)$
$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle) \wedge \langle 1,0\rangle$
$\langle a,a'\rangle = \langle a,a'\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$
$\langle a,a'\rangle = \langle a,a'\rangle$.
sub case 4. If $\langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \neq \langle b,b'\rangle$
$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle)$
$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$. Hence (2.1) holds.
case 2. Assume $\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle$
sub case 1. If $\langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle$ then $\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$, $\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 2. If $\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$, $\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle b,b'\rangle$, $\langle b,b'\rangle = \langle b,b'\rangle$
sub case 3. If $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$ then $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$, $\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle$, $\langle b,b'\rangle = \langle b,b'\rangle$
sub case 4. if $\langle c,c'\rangle \neq \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle$, $\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle)$, $\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$ $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 5. if $\langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \neq \langle b,b'\rangle$, $\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle)$, $\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle b,b'\rangle$, $\langle b,b'\rangle = \langle b,b'\rangle$.
Hence (2.1) holds. □

REMARK 2.5. Lemma(2.1)Can be generalized as $(\bigwedge_i \langle a_i,a_i'\rangle) \leftarrow \langle c,c'\rangle = \bigwedge_i(\langle a_i,a_i'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)$

LEMMA 2.6. 1.$(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)$ (2.2)

PROOF. case 1. assume$\langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle$
sub case 1. If $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$, then $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$, $\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle 1,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$.
sub case 2. If $\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$ then $\langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle$, $\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle \vee \langle c,c'\rangle$, $\langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle$
sub case 3. If $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle$, $\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle 1,0\rangle \vee \langle c,c'\rangle)$, $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 4. If $\langle c,c'\rangle \neq \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle$, $\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle)$, $\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle 1,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 5. If $\langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \neq \langle b,b'\rangle$, $\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle)$, $\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle a,a'\rangle$, $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
case 2. Assume $\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle$
sub case 1. If $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$ then $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$, $\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle 1,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 2. If $\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$, $\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle \vee \langle 1,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 3. If $\langle c,c'\rangle \neq \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle$, $\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle)$, $\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle 1,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$.
sub case 4. If $\langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \neq \langle b,b'\rangle$, $\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle)$, $\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle 1,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$.
sub case 5. If $\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle$
then $\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle$
$= (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)$
$\Rightarrow \langle c,c'\rangle$
$= \langle c,c'\rangle \vee \langle c,c'\rangle$
$= \langle c,c'\rangle$.
Thus Lemma (2.2) holds. □

REMARK 2.7. Can be generalized as $(\bigwedge_{i=1}^{n} \langle a_i,a_i'\rangle) \rightarrow \langle c,c'\rangle = \bigvee_{i=1}^{n} (\langle a_i,a_i'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)$

LEMMA 2.8.
$(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)$ ...(2.3)

PROOF. case 1. Assume $\langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle$
sub case 1. If $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$, then $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 2. If $\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle \wedge \langle c,c'\rangle$
$\langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle$
sub case 3. If $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle 1,0\rangle \wedge \langle c,c'\rangle)$
$\langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle$
sub case 4. If $\langle c,c'\rangle \neq \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle)$
$\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 5. If $\langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \neq \langle b,b'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle)$
$\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle a,a'\rangle$
$\langle a,a'\rangle = \langle a,a'\rangle$
case 2.
Assume$\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle$
sub case 1. If$\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$ and $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$
$\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 2. If $\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$
$\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$
$\langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle$
sub case 3. If $\langle c,c'\rangle \neq \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle$
$\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle)$
$\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle = \langle b,b'\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$
$\langle b,b'\rangle = \langle b,b'\rangle$
sub case 4. If $\langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \neq \langle b,b'\rangle$
$\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle b,b'\rangle)$
$\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle a,a'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle 1,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$.
Thus Lemma (2.3) holds. □

REMARK 2.9. Can be generalized as $(\bigvee_{i=1}^{n} \langle a_i,a_i'\rangle) \rightarrow \langle c,c'\rangle = \bigwedge_{i=1}^{n} (\langle a_i,a_i'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)$

LEMMA 2.10.
$(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)$ ....(2.4)

PROOF. case 1. Assume $\langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle$
sub case 1. If $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$ then $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle$
$\langle b,b'\rangle = \langle b,b'\rangle$
sub case 2. If$\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$ then $\langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle 1,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 3. If$\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \vee \langle 1,0\rangle)$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$

sub case 4. If$\langle c,c'\rangle \neq \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle)$
$\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle = \langle a,a'\rangle \vee \langle 1,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 5. If $\langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \neq \langle b,b'\rangle$
$\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = (\langle c,c'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle)$
$\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle 1,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
case 2.
Assume$\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle$
sub case 1. If$\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$, then $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$
$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle$
$\langle a,a'\rangle = \langle a,a'\rangle$
sub case 2. If$\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$
$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle b,b'\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 3. If $\langle c,c'\rangle \neq \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle$
$\langle a,a' \leftarrow\rangle \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle)$
$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle b,b'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle 1,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$
sub case 4. If$\langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \neq \langle b,b'\rangle$
$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle)$
$\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle a,a'\rangle = \langle 1,0\rangle \vee \langle b,b'\rangle$
$\langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$. Similarly we can prove when $\langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle$ and $\langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle$.
Thus Lemma (2.4) holds. □

REMARK 2.11. Can be generalized as $(\bigvee_{i=1}^{n} \langle a_i,a_i'\rangle) \leftarrow \langle c,c'\rangle = \bigvee_{i=1}^{n} (\langle a_i,a_i'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)$

PROPOSITION 2.12. Let $\langle a,a'\rangle, \langle b,b'\rangle, \langle c,c'\rangle \in$ IFS then
$(i).(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = [(\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)] \vee [(\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)]$
$(ii).(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = [(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)] \vee [(\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)]$

PROOF. By using Lemma 2.1 and Lemma 2.2
$(i).(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = [(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftarrow \langle c,c'\rangle] \wedge [(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \rightarrow \langle c,c'\rangle]$
$= [\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)] \wedge [(\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)]$
$= (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge [(\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)]$
$= (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge [[(\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)] \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$
$= [(\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)] \vee [(\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)]$
$= [(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)] \vee [(\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)]$
$= [(\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)] \vee [(\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)]$.
It proves (i).
By using Lemma 2.3 and Lemma 2.4
$(ii).(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$
$= [(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftarrow \langle c,c'\rangle] \wedge [(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \rightarrow \langle c,c'\rangle]$
$= [(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \rightarrow \langle c,c'\rangle] \wedge [(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftarrow \langle c,c'\rangle]$
$= [(\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)] \wedge [(\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)]$
$= (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge [[(\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)] \vee (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)]$
$= (\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge [[(\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)] \vee [(\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)]]$
$= [(\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle a,a'\rangle \leftarrow \langle c,c'\rangle)] \vee [(\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)]$
$= [(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle)] \vee [(\langle a,a'\rangle \rightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)]$
It proves (ii). □

PROPOSITION 2.13. Let $\langle a,a'\rangle, \langle b,b'\rangle\ \langle c,c'\rangle \in IFS$ then
$(i).(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \leq (\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle \leq (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$
$(ii).(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \leq (\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle \leq (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

PROOF. (i). $(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle \leq (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$ is trivial from Proposition 2.3(i)
case 1. If $\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle$ then
$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$$= \begin{cases} (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge \langle b,b'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases} \quad ...(2.5)$$

$(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$

$$= \begin{cases} \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle 1,0\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ \langle b,b'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases} \quad ...(2.6)$$

From (2.5) and (2.6)$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \leq (\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$.

case 2. If$\langle a,a'\rangle = \langle b,b'\rangle$, then
$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) =$

$$\begin{cases} \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle 1,0\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ \langle b,b'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases}$$

$= (\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$.

case 3. If $\langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle$
$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) =$

$$\begin{cases} \langle c,c'\rangle \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)\text{if } \langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle c,c'\rangle \text{ if } \langle a,a'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ \langle a,a'\rangle \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)\text{if } \langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases} \quad ...(2.7)$$

$$(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \begin{cases} \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle 1,0\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ \langle a,a'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases} \quad ...(2.8)$$

By (2.7) and (2.8)$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \leq (\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$.
Through compared with we can see for any$\langle a,a'\rangle, \langle b,b'\rangle, \langle c,c'\rangle \in IFS$
$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \leq (\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow (\langle c,c'\rangle \leq (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$
(ii). By Proposition 2.3(ii) it is trivial that $(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle \$ \leq (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$
If$\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle$ then
$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) =$

$$\begin{cases} (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge \langle c,c'\rangle \text{ if } \langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle c,c'\rangle \text{ if } \langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge \langle b,b'\rangle \text{ if } \langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases} \quad ...(2.9)$$

$(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = \begin{cases} \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ \langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases}$ ...(2.10)

By (2.9) and (2.10)$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \leq (\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$.

case 2. If $\langle a,a'\rangle = \langle b,b'\rangle$

$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$= \begin{cases} (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge \langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ \text{if } \langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = \langle 1,0\rangle \\ \text{if } \langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge \langle b,b'\rangle = \langle b,b'\rangle \\ \text{if } \langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases}$

$(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = \begin{cases} \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle 1,0\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ \langle b,b'\rangle & \text{if } \langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases}$

Thus $(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \leq (\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$

case 3. If$\langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle$ then

$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = \begin{cases} \langle c,c'\rangle \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) & \text{if } \langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ \langle a,a'\rangle \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) & \text{if } \langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases}$ ...(2.11)

$(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = \begin{cases} \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle > \langle c,c'\rangle \\ \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle = \langle c,c'\rangle \\ \langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle \end{cases}$ ...(2.12)

By (2.11) and (2.12) $(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \leq (\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$. □

PROPOSITION 2.14. Let $\langle a,a'\rangle, \langle b,b'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \in$ IFS if $\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle \neq \langle c,c'\rangle$ then

(i).$(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

(ii).$(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$= $(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

PROOF. (i). If $(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) > \langle c,c'\rangle$

then $(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle$

while $(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = \langle c,c'\rangle \wedge \langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle$

if $(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) < \langle c,c'\rangle$ then $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$ *or* $\langle b,b'\rangle < \langle c,c'\rangle$

suppose $\langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle$

then $(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle = \begin{cases} \langle b,b'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle \geq \langle b,b'\rangle \\ \langle a,a'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle \end{cases}$

$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$= \langle a,a'\rangle \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$= \begin{cases} \langle b,b'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle \geq \langle b,b'\rangle \\ \langle a,a'\rangle & \text{if } \langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle \end{cases}$

hence $(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$.

(ii). Since $(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \neq \langle c,c'\rangle$ then suppose $(\langle a,a'\rangle \neq \langle c,c'\rangle)$ and $(\langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle) \Rightarrow \langle a,a'\rangle < \langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle$ in this case

$(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = (\langle c,c'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = \langle 1,0\rangle$

$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee \langle 1,0\rangle$

$=\langle a,a'\rangle \vee \langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$

hence (ii) holds.

If$\langle a,a'\rangle = \langle b,b'\rangle$ then

$(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle b,b'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$

$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$=(\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$=(\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$(\langle a,a'\rangle) \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle =(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$.

Hence (ii) holds. Similarly we can prove the other cases also. □

PROPOSITION 2.15. Let $\langle a,a'\rangle, \langle b,b'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \in IFS$ and $\langle c,c'\rangle \neq \langle 1,0\rangle$

then $(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

if and only if one of the following condition holds

(i). When $\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle, \langle b,b'\rangle \neq \langle c,c'\rangle$

(ii). When $\langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle, \langle a,a'\rangle \neq \langle c,c'\rangle$

(iii).When $\langle a,a'\rangle = \langle b,b'\rangle$

PROOF. (i) $\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle$

If $\langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle$

$(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle$

$(\langle a,a'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$=(\langle a,a'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle c,c'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$= (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle b,b'\rangle) \wedge \langle 1,0\rangle = \langle b,b'\rangle) \wedge \langle 1,0\rangle = (\langle c,c'\rangle) \wedge \langle 1,0\rangle) = \langle c,c'\rangle$

but$\langle c,c'\rangle \neq \langle 1,0\rangle$ a contradiction

(ii).Assume $\langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle$

if $\langle a,a'\rangle = \langle c,c'\rangle$

$(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$

$= \langle c,c'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \langle 1,0\rangle$

$(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = (\langle c,c'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle a,a'\rangle) = \langle 1,0\rangle \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle a,a'\rangle) = \langle 1,0\rangle \wedge \langle a,a'\rangle = \langle 1,0\rangle \wedge \langle c,c'\rangle = \langle c,c'\rangle$ but $\langle c,c'\rangle \neq \langle 1,0\rangle$

which is a contradiction

(iii) When$\langle a,a'\rangle = \langle b,b'\rangle$

$(\langle a,a'\rangle \wedge \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$= (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \wedge (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) = (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

therefore the conclusion is obvious. □

PROPOSITION 2.16. Let$\langle a,a'\rangle, \langle b,b'\rangle$ and $\langle c,c'\rangle \in IFS$ and$\langle c,c'\rangle \neq \langle 1,0\rangle$

then $(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = (\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$\Leftrightarrow$ one of the following condition holds

(i).When$\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle, \langle b,b'\rangle \neq \langle c,c'\rangle$

(ii).When$\langle a,a'\rangle < \langle b,b'\rangle, \langle a,a'\rangle \neq \langle c,c'\rangle$

(iii).When$\langle a,a'\rangle = \langle b,b'\rangle$

PROOF. (i). If $\langle a,a'\rangle > \langle b,b'\rangle$

certainly $\langle b,b'\rangle \neq \langle c,c'\rangle$. Otherwise

$(\langle a,a'\rangle \vee \langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle = \langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle c,c'\rangle$

$= \langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle b,b'\rangle$

$=\langle b,b'\rangle = \langle c,c'\rangle$

$(\langle a,a'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle) \vee (\langle b,b'\rangle) \leftrightarrow \langle c,c'\rangle)$

$=(\langle a,a'\rangle \leftrightarrow \langle b,b'\rangle) \vee \langle 1,0\rangle = \langle b,b'\rangle \vee \langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$ but $\langle c,c'\rangle \neq \langle 1,0\rangle$

a contradiction.

(ii). When $\langle a, a'\rangle < \langle b, b'\rangle$ we have $\langle a, a'\rangle \neq \langle c, c'\rangle$
otherwise $(\langle a, a'\rangle \vee \langle b, b'\rangle) \leftrightarrow \langle c, c'\rangle = \langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle$
= $\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle a, a'\rangle$
= $\langle a, a'\rangle$
$(\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) \vee (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle)$ = $(\langle c, c'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) \vee (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle)$
$= \langle 1, 0\rangle \vee (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle a, a'\rangle)$
$\langle 1, 0\rangle \vee \langle a, a'\rangle = \langle 1, 0\rangle$
which is a contradiction.
(iii).If $\langle a, a'\rangle = \langle b, b'\rangle$ then
$(\langle a, a'\rangle \vee \langle b, b'\rangle) \leftrightarrow \langle c, c'\rangle = \langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle$
$(\langle a, a'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) \vee (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle)$
$(\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) \vee (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle) = (\langle b, b'\rangle \leftrightarrow \langle c, c'\rangle)$.
Thus (iii) holds. □

3. REFERENCES

[1] Atanassov K., Intuitionistic Fuzzy Sets., VII ITKR's Section, Sofia, June 1983.

[2] Hashimoto H., Sub-inverses of fuzzy Matrices, Fuzzy Sets and Systems, Vol.12(1984),155-168.

[3] Murugadas P and Lalitha K., Dual Implication Operator in Intuitionistic Fuzzy Matrices, International conference on Mathematical Modelling and its Application-2012.

[4] Sriram S and Murugadas P., Sub-inverses of Intuitionistic Fuzzy Matrices, Acta Ciencia Indica(mathematics),Vol. XXXVII M,No.1,41(2011).

[5] Sriram S and P. Murugadas., On Semiring of Intuitionistic Fuzzy Matrices, Applied Mathematical Science, Vol. 4(23), (2010), 1099-1105.

[6] Sriram S and P. Murugadas., Contributions to a Study on Generalized Fuzzy Matrices, Ph.D Thesis, Department of Mathematics, Annamalai University, Tamil Nadu, India, (2011).

[7] Zadeh L.A., Fuzzy Sets, Journal of Information and Control, Vol.8(1965), 338-353.